1. Speciale relativiteitstheorie

Bij nader inzien blijkt de Galilei-Huygens symmetrie niet exact te zijn. Daarvoor in de plaats komt Lorentz symmetrie, die de lichtsnelheid invariant laat. De wiskundige vorm van deze symmetrie wordt afgeleid naar analogie van de klassieke bewegingsvergelijkingen. Een paar eenvoudige toepassingen zijn: de tijddilatatie, het optellen van snelheden, en beweging met een constante versnelling.

Hierboven werden de bewegingsvergelijkingen van de klassieke mechanica afgeleid op grond van de Galilei-Huygens symmetrie. Maar bij nader inzien blijkt, dat onze natuur niet exact aan die symmetrie voldoet. Uit de experimenten van Michelson en Morley (1887-1888) volgt namelijk dat het licht *niet* gehoorzaamt aan die symmetrie. Als licht beweegt met een snelheid c, zouden we volgens Huygens verwachten dat die snelheid slechts relatief is; meebewegen met diezelfde snelheid (en dat kan, door een Galilei-Huygens-transformatie) zou dan een effectieve snelheid $c - c = 0$ opleveren. Maar het `Michelson-Morley experiment` (dat de afgelopen eeuw in vele varianten, met steeds grotere precisie is herhaald) toont aan dat *de lichtsnelheid niet afhangt van de bewegingstoestand van de bron of de ontvanger*. De lichtsnelheid is niet relatief, maar absoluut: de lichtsnelheid is `invariant`.

Dat is totaal strijdig met Galilei-Huygens symmetrie, en daarmee komt de klassieke mechanica op losse schroeven te staan. Het gaat er nu om, een mechanica te bedenken waarin c invariant is. Je zou zo denken dat een dergelijke constructie 'absoluutheidstheorie' of zoiets zou worden genoemd, maar de naam is 'relativiteitstheorie' geworden (Einstein, de bedenker van de theorie, vond die naam ook maar niks). Om in vogelvlucht [*1] te zien hoe deze werkt, gaan we eerst na hoe een

[*1] Uitgebreide uitleg is te vinden in E.F. Taylor & J.A. Wheeler, *Spa-*

G-H-transformatie wordt geformuleerd. Wij beperken ons even tot één ruimte-dimensie. Laat x de positie zijn van een deeltje op tijd t. Het deeltje wordt dus beschreven met de coördinaten (x, t) in een stelsel $\mathcal{K}$. Stel dat een waarnemer in een ander stelsel, $\mathcal{K}'$, met een snelheid w beweegt ten opzichte van $\mathcal{K}$. De coördinaten in $\mathcal{K}'$ zijn (x', t') en volgens Huygens geldt dat

$$x' = x + wt \tag{1.1}$$

$$t' = t \tag{1.2}$$

Een snelheid is $v = dx/dt$, en dus volgt hieruit dat

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + w = v + w \tag{1.3}$$

zoals verwacht. Het is duidelijk dat er, onder de transformatie Eq.(1.3) , nooit een invariante snelheid kan bestaan.

De vraag is nu: wat moet er in de plaats komen voor Eq.(1.1,2) zodat er wèl een invariante snelheid is? Dit kunnen wij beantwoorden door ons eerst te realiseren dat het bestaan van zo'n bijzondere snelheid betekent dat *ruimte en tijd iets met elkaar te maken hebben.* Immers, er geldt

$$\text{snelheid} = \frac{\text{ruimte}}{\text{tijd}} \tag{1.4}$$

dus meters per seconde, kilometers per uur, en dergelijke. Als een snelheid invariant is, dan moeten teller en noemer samenspannen om ervoor te zorgen dat het quotiënt steeds hetzelfde blijft. Ruimte en tijd hebben dus iets met elkaar te maken, sterker nog, ze kunnen met een en dezelfde maat worden gemeten, door als maat voor de afstand de reistijd van het licht te nemen (omdat c invariant is, is dat een prima

---

cetime phycics, Freeman, New York 1966; D. Bohm, *The special theory of relativity,* Routledge, London, 1996; A.P. French, *Special relativity,* Chapman & Hall, London, 1997.

manier). De afstand van de Aarde naar de Maan is 1.3 seconden, naar de Zon 8.3 minuten, naar de Andromeda Nevel 2 miljoen jaar.

Blijkbaar stelt de Natuur ons de eis: “Ontwerp een mechanica waarin c onveranderd blijft.” De symmetrie die c invariant maakt heet `Lorentz symmetrie`. Hieronder zullen we zien op welke manier je zoiets aanpakt, als illustratie van het thema *een formule is er niet in de eerste plaats om in je rekenmachine te proppen, maar om naar je hand te zetten en te analyseren.*

Omdat tijd en ruimte in deze zin ‘hetzelfde zijn’, ligt het voor de hand om de transformatie Eq.(1.1,2) uit te breiden tot een symmetrische vorm:

$$x' = L_{xx}x + L_{xt}ct \tag{1.5}$$

$$ct' = L_{tx}x + L_{tt}ct \tag{1.6}$$

Dit is eigenlijk de belangrijkste stap van de hele behandeling. Uit het experimentele feit dat c invariant is, concluderen wij dat ruimte en tijd met dezelfde maat te meten zijn, en staan wij toe dat een term evenredig met x verschijnt in de transformatieregel voor de tijd t. Dat betekent iets heel merkwaardigs: namelijk, dat tijd *relatief* kan zijn, omdat het nu niet langer gegarandeerd is dat $t' = t$. Gegeven de mogelijkheid dat x en t in een mengvorm optreden, is het verstandig om ze met dezelfde maat te meten. De beste manier daarvoor is zulke eenheden te kiezen dat $c \equiv 1$, maar dat is onder sterrenkundigen helaas niet gebruikelijk. Daarom schrijven we in Eq.(1.5,6) ct inplaats van t. Eq.(1.5,6) komen in de plaats van Eq.(1.1,2) .

Het gaat er uiteraard om, de matrix L te bepalen. Laten we eerst eens zien hoe zoiets gaat in een wat minder exotisch geval: draaiingen. Bij een rotatie van coördinaten (x, y) naar (x', y') hebben we

$$x' = R_{xx}x + R_{xy}y \tag{1.7}$$

$$y' = R_{yx}x + R_{yy}y \tag{1.8}$$

Omdat bij een draaiing alle lengtes hetzelfde blijven, hebben wij

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = r^2 \tag{1.9}$$

Merk op dat het opleggen van de invariantie Eq.(1.9) een voorschrift is voor het afstandsrecept in de ruimte (Pythagoras)! In een ander type ruimte zou dat wel eens helemaal anders kunnen zijn.

Ga nu zelf het volgende na.

Een cirkel is de verzameling van alle punten met een vaste afstand tot een gegeven punt. Teken de cirkels die overeenkomen met het afstandsrecept Eq.(1.9) , met $r^2 = |x| + |y|$ en met $r^2 = x^2 - y^2$.

Passen we Eq.(1.9) toe op Eq.(1.7,8) dan krijgen wij de eisen

$$R_{xx}^2 + R_{yx}^2 = 1 \ ; \quad R_{xy}^2 + R_{yy}^2 = 1 \ ; \quad R_{xx}R_{xy} + R_{yx}R_{yy} = 0 \tag{1.10}$$

Hieraan wordt voldaan door Eq.(1.7,8) te schrijven als

$$x' = x \cos\phi - y \sin\phi \tag{1.11}$$

$$y' = x \sin\phi + y \cos\phi \tag{1.12}$$

waarin ϕ de draaiingshoek.

Op soortgelijke manier gaan we nu de coëfficiënten vinden in Eq.(1.5,6) . De eerste eis die we stellen is, dat de beweging van het licht in de coördinatenstelsels $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}'$ hetzelfde is:

$$x = \pm ct \tag{1.13}$$

$$x' = \pm ct' \tag{1.14}$$

Met behulp van Eq.(1.5,6) volgt hieruit, als we eerst het geval $x = +ct$ nemen, dat

$$ct' = (L_{xx} + L_{xt})\, ct \tag{1.15}$$

$$ct' = (L_{tx} + L_{tt})\, ct \tag{1.16}$$

en dus

$$L_{xx} + L_{xt} = L_{tx} + L_{tt} \tag{1.17}$$

$$L_{xx} - L_{xt} = -L_{tx} + L_{tt} \tag{1.18}$$

waarin de tweede regel op dezelfde manier is afgeleid als de eerste, maar dan voor licht dat de andere kant opgaat, $x = -ct$. *Merk op dat er van deze hele truc niets terecht zou komen als c niet invariant was*, want dan zouden we hebben $x' = \pm c't'$ en schoten we niets op. Uit Eq.(1.17,18) volgen de eerste twee voorwaarden waaraan de transformatiematrix L moet voldoen:

$$L_{xx} = L_{tt} \tag{1.19}$$

$$L_{xt} = L_{tx} \tag{1.20}$$

Hoe komen we nu aan verdere voorwaarden voor L? Het uiteindelijke doel is immers om alle vier de componenten van L dwingend voor te schrijven uit de eis dat c invariant blijft. Merk op dat het helemaal niet voor de hand ligt dat dat ook echt kan! We gaan net zo te werk als in Eq.(1.3) en schrijven

$$\frac{v'}{c} = \frac{dx'}{c\,dt'} = \frac{L_{xx}dx + L_{tx}c\,dt}{L_{tx}dx + L_{xx}c\,dt} = \frac{L_{xx}v + L_{tx}c}{L_{tx}v + L_{xx}c} \tag{1.21}$$

Vervolgens stellen we vast dat voor snelheden ver beneden die van het licht, de GH-symmetrie wel degelijk goed werkt. Dus eisen wij dat, in de limiet voor $c \to \infty$, Eq.(1.21) het resultaat geeft dat $v' = v$, en dus

$$\frac{v}{c} = \frac{v'}{c} \simeq \frac{L_{tx}c}{L_{xx}c} = \frac{L_{tx}}{L_{xx}} \tag{1.22}$$

Er blijft dus nog maar één grootheid te bepalen over, namelijk L_{xx}, en wij kunnen Eq.(1.5,6) schrijven als

$$x' = L_{xx}(x + vt) \tag{1.23}$$

$$ct' = L_{xx}(\frac{v}{c}x + ct) \tag{1.24}$$

Door Eq.(1.23,24) van elkaar af te trekken komt er

$$x' - ct' = L_{xx}(1 - \frac{v}{c})(x - ct) \tag{1.25}$$

Nu komt het slotstuk: in de transformatie die door L wordt beschreven, beweegt het coördinatenstelsel $\mathcal{K}'$ met een snelheid v ten opzichte van $\mathcal{K}$. Uiteraard moet L zo zijn, dat een terugtransformatie met een snelheid $-v$ weer de oorspronkelijke toestand oplevert. Dus hebben we dat naast Eq.(1.25) moet gelden

$$x - ct = L_{xx}(1 + \frac{v}{c})(x' - ct') \tag{1.26}$$

Door substitutie van Eq.(1.25) in Eq.(1.26) komt er

$$L_{xx}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \tag{1.27}$$

waarmee tenslotte de hele matrix L is vastgelegd:

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \tag{1.28} \spadesuit$$

Dit is de matrix van de `Lorentztransformatie`, die in de plaats komt van de Galilei-Huygens transformatie Eq.(1.1,2) .

Deze transformatie kan uiteraard ook worden uitgeschreven in componenten. Het is gebruikelijk om dat wat af te korten, door gebruik te maken van de definities

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{1.29} \spadesuit$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1.30} \spadesuit$$

waarmee de Lorentztransformatie een plezierig symmetrische vorm aanneemt:

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \tag{1.31} \spadesuit$$

$$ct' = \gamma(\beta x + ct) \tag{1.32} \spadesuit$$

Ga nu zelf het volgende na.

Bewijs expliciet dat L in de limiet voor $c \to \infty$ inderdaad de Galilei-Huygens-transformatie oplevert. Doe dit door een Taylor-ontwikkeling toe te passen op de wortelvorm in Eq.(1.28) .

Ga nu zelf het volgende na.

Bewijs met behulp van Eq.(1.31,32) dat de grootheid $s^2 = c^2t^2 - x^2$ invariant is onder Lorentztransformaties. Men noemt s het `interval`. De invariantie van het interval is analoog aan de invariantie van de straal r van de cirkel in Eq.(1.9) .

De Lorentztransformatie is de basis van de relativistische mechanica. Hier laten we daarvan maar een zeer klein stukje zien. Ten eerste een stelling over het optellen van snelheden in één dimensie. Laat een deeltje een snelheid u hebben in het stelsel $\mathcal{K}$ en laat $\mathcal{K}'$ met een snelheid v bewegen ten opzichte van $\mathcal{K}$. Met welke snelheid beweegt het deeltje gezien vanuit $\mathcal{K}'$? Passen wij Eq.(1.21) toe op u dan zien we (met behulp van Eq.(1.28)) dat

$$\frac{u'}{c} = \frac{dx + v\,dt}{(v/c)dx + c\,dt} = \frac{u+v}{uv/c+c} \tag{1.33}$$

en zodoende

$$u' = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \tag{1.34}$$ ♠

Ga nu zelf het volgende na.

Bewijs uit Eq.(1.34) dat de lichtsnelheid de grootst mogelijke snelheid is, door in te vullen $v = c$.

Uit Eq.(1.34) kunnen wij ook nog een vergelijking afleiden voor relativistische beweging onder invloed van een constante kracht. Dit is een nuttige oefening, omdat het laat zien hoe je moet oppassen met uitspraken over snelheden in een relativistische omgeving. Evenals boven beperken wij ons hier tot één ruimte-dimensie.

Stel dat wij een ruimteschip waarnemen dat ten opzichte van ons coördinatenstelsel $\mathcal{K}$ een snelheid v heeft. Aan boord van het ruimteschip gebruikt men stelsel $\mathcal{K}'$, waarin $v' = 0$, want ten opzichte van zichzelf staat het schip stil. De stoker van het ruimteschip gooit er een schepje op, en bereikt daarmee een kleine versnelling $\delta v'$. Met 'klein' wordt uiteraard bedoeld $|\delta v'| \ll c$: in de klassieke mechanica heeft zo'n bewering geen zin, omdat er geen absolute snelheid bestaat en je dus ook niet van 'snel' of 'langzaam' kunt spreken! Gezien door ons verandert de snelheid van het schip van v naar $v+\delta v$. Door de transformatie $\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ in Eq.(1.34) vinden we het verband tussen $\delta v'$ en δv:

$$\delta v' = (v + \delta v)' = \frac{(v + \delta v) - v}{1 - v(v + \delta v)/c^2} \tag{1.35}$$

De veranderingen δ worden als zeer klein beschouwd. Wij maken gebruik van de benadering

$$\frac{1}{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon \quad ; \qquad \epsilon \ll 1 \tag{1.36}$$

en vinden dan voor Eq.(1.35)

$$\delta v' \simeq \frac{1}{1 - v^2/c^2}\, \delta v \tag{1.37}$$

Stel nu dat de stoker er per tijdseenheid $\delta t'$ een schepje op doet. Vanwege de Lorentztransformatie weten wij dat, gezien vanaf een vast ruimtelijk punt, de tijd transformeert volgens de formule van de `tijd-dilatatie`

$$t' = t\,\sqrt{1 - (v/c)^2} \tag{1.38}$$

en zodoende is

$$\frac{dv'}{dt'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt} \tag{1.39}$$

Wanneer wij dv'/dt' invullen als een constante a, krijgen we de bewegingsvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = a\, \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{1.40} ♠$$

Die komt dus in de plaats voor de klassieke vorm $F = ma$.

Het treft dat Eq.(1.40) exact opgelost kan worden. Om de berekeningen gemakkelijker te maken, drukken wij alle snelheden uit in eenheden van c door de transformatie

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{1.41}$$

De oplossing van Eq.(1.40) is dan

$$\frac{at}{c} \equiv \tau = \int \left(1-\beta^2\right)^{-3/2} d\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.42}$$

Hierin is ook ook de tijd dimensieloos gemaakt. Door inversie van Eq.(1.42) wordt de oplossing voor β

$$\beta = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{1.43}$$

We zien nu direct dat in het begin $\tau \approx 0$, als het ruimteschip nog maar net begint met versnellen,

$$\beta = \tau \ ; \qquad \text{en dus} \qquad v = at \tag{1.44}$$

hetgeen precies overeenkomt met het klassieke geval. Als $\tau \to \infty$ daarentegen, hebben we

$$\beta = 1 \ ; \qquad \text{en dus} \qquad v = c \tag{1.45}$$

Ook een oneindig lang volgehouden versnelling brengt ons niet boven de lichtsnelheid uit!

Tenslote berekenen wij nog welke afstand het ruimteschip aflegt. Omdat $v = dx/dt$ hebben we uit Eq.(1.43)

$$\frac{a}{c^2}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{1.46}$$

met als oplossing

$$\frac{a}{c^2}x = \int \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\,d\tau = \int \frac{1}{2\sqrt{1+\tau^2}}\,d\tau^2 = \sqrt{1+\tau^2} - 1 \tag{1.47}$$

waarin de integratieconstante zo gekozen is dat het ruimteschip vertrekt van $x = 0$ op $\tau = 0$.

Ga nu zelf het volgende na.

Bereken twee limietgevallen voor Eq.(1.47) , namelijk $\tau \ll 1$ en $\tau \gg 1$. Laat zien dat het eerste geval overeenkomt met het klassiek-mechanische $x = \frac{1}{2}at^2$ en het tweede geval met het extreem-relativistische $x = ct$.

Het leven aan boord gaat gewoon door, en we zien pas merkwaardigheden wanneer wij bezien hoe de tijd bij ons verloopt vergeleken met die welke wij (niet zij!) aflezen op de klok van het schip. Wegens Eq.(1.38) is

$$\tau' = \tau\sqrt{1-\beta^2} \tag{1.48}$$

en dus, gebruik makend van Eq.(1.42) ,

$$d\tau' = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\,d\tau \tag{1.49}$$

De oplossing hiervan is

$$\tau' = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\,d\tau = \log\left(\tau + \sqrt{1+\tau^2}\right) \tag{1.50}$$

Opnieuw bekijken we de limietgevallen. Als de versnelling begint, $\tau \simeq 0$, is

$$\tau' \simeq \log(\tau + 1) \simeq \tau \tag{1.51}$$

hetgeen weer precies is wat we klassiek verwachten. Als $\tau \to \infty$ daarentegen, komt er

$$\tau' \simeq \log(\tau + \sqrt{\tau^2}) = \log(2\tau) \tag{1.52}$$

Dus: ten gevolge van de tijddilatatie *zien wij de tijd aan boord van het ruimteschip veel langzamer lopen dan bij ons!*

Ga nu zelf het volgende na.

Reken de versnelling a uit, in de veronderstelling dat de tijdseenheid overeenkomend met $\tau = 1$ precies 1 jaar is. Hoe groot is deze a in vergelijking met de versnelling g van de zwaartekracht aan het oppervlak van de Aarde? Zou het comfortabel zijn aan boord van zo'n ruimteschip?

Ga nu zelf het volgende na.

De afstand van de Zon tot het centrum van de Melkweg is ongeveer 28000 jaar. Als een ruimteschip die afstand overbrugt met de versnelling a uit de vorige som, hoeveel ouder zijn de bemanningsleden dan volgens de boordklok wanneer zij, naar onze tijdrekening, 28000 jaar gereisd hebben? Doe dezelfde berekening voor een sterrenstelsel op een afstand van 10 miljard jaar. Wat zegt dit over de bereikbaarheid (in principe!) van verre plaatsen in ons Heelal?

Tot besluit nog een stuk over de energie van relativistische bewegingen. De arbeid die een kracht F verricht is gelijk aan de kracht vermenigvuldigd met de weglengte. Een klein stukje dx van de weg komt dus overeen met een verandering van de energie E:

$$dE = F\,dx \tag{1.53}$$

In bovenstaande vergelijkingen Eq.(1.43,46) zagen wij, dat

$$dx = \frac{c^2}{a}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{c^2}{a}\beta\,d\tau \tag{1.54}$$

Merk op dat dit niet alleen voor het raket-voorbeeld geldt, maar *algemeen* is, omdat we slechts infinitesimale veranderingen bezien. Gebruiken we Eq.(1.53) in Eq.(1.54) dan komt er

$$dE = mc^2\beta\,d\tau \tag{1.55}$$

Met behulp van Eq.(1.42) is dit te schrijven als

$$dE = mc^2 \frac{\beta \, d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \tag{1.56}$$

Enig geploeter met integratie laat zien dat dan

$$dE = mc^2 \, d\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.57}$$

Omdat dit voor elk infinitesimaal stukje van de baan zo is, hoeven we niets te veronderstellen over F, en dus geldt algemeen dat

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.58}$$ ♠

Dit is Einsteins beroemde massa-energieformule. Dus niet $E = mc^2$, zoals amateurs zeggen! De formule Eq.(1.58) is veel algemener dan dat. In het bijzondere geval van de beweging onder invloed van een constante kracht F (constant zoals gezien door de raket) hebben we uit Eq.(1.43,47,58)

$$E = mc^2 \sqrt{1+\tau^2} = mc^2 + Fx \tag{1.59}$$

Hoe realistisch is het idee van zo'n voertuig, waarmee wij in principe overal in het Heelal kunnen komen binnen een redelijke eigen tijd? Hoe je zoiets moet bouwen is onbekend, maar in principe is er geen bezwaar tegen. Een mogelijke tegenwerping is, dat de 'brandstof' voor zo'n raket van buiten moet komen. Maar wij weten dat de ruimte tussen de sterren niet leeg is, en de vraag is dus: kan een ruimtevoertuig voldoende materie verzamelen om zichzelf daarmee te versnellen? We bekijken eerst het geval dat de raket reeds relativistisch beweegt, dus $v \approx c$. Dan hebben we wegens Eq.(1.42,59)

$$E = mc^2\tau = amct = amx \tag{1.60}$$

Als het ruimteschip een doorsnede D heeft, kan het over een afstand x een hoeveelheid massa M opscheppen die wordt gegeven door

$$M = \rho D x \tag{1.61}$$

waarin ρ de massadichtheid van het medium waar de raket doorheen beweegt. Hieruit volgt een schatting voor D. Als $\tau = 1$ overeen komt met een jaar, dan is wegens Eq.(1.42)

$$\frac{c}{a}\tau = \frac{c}{a} = 1 \text{ jaar} = 3.156 \times 10^7 \text{ s} \tag{1.62}$$

en dus is de versnelling van zo'n raket

$$a = 9.51 \text{ m s}^{-2} \tag{1.63}$$

hetgeen prettig dicht bij de aardse waarde 9.8 ligt, zodat wij ons aan boord zeer goed zouden voelen (wegens het equivalentie-principe is er geen verschil tussen een versnelling en de zwaartekracht). De energie die we uit de opgeveegde materie kunnen halen is Mc^2, en dus vinden we uit Eq.(1.60,61) dat

$$amx = \rho D x c^2 \quad \rightarrow \quad D = \frac{am}{\rho c^2} \tag{1.64}$$

Nu vullen we een paar schattingen in. Laat de massa m van de raket een miljoen ton zijn (wie weet?) en laat de gewenste versnelling gegeven zijn door Eq.(1.63) . De minimale dichtheid in het Heelal is de gemiddelde massadichtheid tussen de sterrenstelsels. Deze is ongeveer een waterstofatoom per kuub, ofwel

$$\rho = 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} \tag{1.65}$$

Zodoende wordt

$$D = \frac{9.51 \times 10^9}{10^{-26} c^2} = 1.06 \times 10^{19} \text{ m}^2 \tag{1.66}$$

De doorsnede van de raket moet dus ongeveer de wortel hieruit zijn, en dat is ruim 3 miljoen kilometer. De baan van de Maan heeft een straal van 384,000 km, de baanstraal van Mercurius is 57.9 miljoen kilometer. Dus de waarde in Eq.(1.66) is niet absurd groot, hoewel duidelijk niet binnen ons technisch bereik. De toestand wordt iets beter als we in plaats van Eq.(1.65) de gemiddelde dichtheid van de interstellaire materie nemen. Deze is ongeveer een waterstofatoom per kubieke centimeter, dus een miljoen maal groter dan Eq.(1.65) zodat D overeenkomstig kleiner wordt:

$$D = 1.06 \times 10^{13} \text{ m}^2 \tag{1.67}$$

hetgeen betekent dat een raket met een 'schep' van ruim 3000 km doorsnede volstaat. Dat is kleiner dan de straal van Aarde (6371 km). Zoals Ya.B. Zel'dovich bij zulke gelegenheden zei: *It is possible, but it is difficult.*

Een iets nauwkeuriger beschouwing leert, dat de schatting Eq.(1.64) een ondergrens is. Immers, wanneer wij Eq.(1.59) in het algemeen gebruiken (dus niet alleen in het geval $v \approx c$) vinden we in plaats van Eq.(1.64)

$$D = \frac{ma}{\rho c^2} + \frac{m}{\rho x} \tag{1.68}$$

Aan het begin van de reis is $x = 0$, dus om te starten hebben we een veel groter schep-oppervlak nodig. De raket moet dus op de een of andere manier gelanceerd worden. Ook dat hoeft geen probleem te zijn. In de buurt van een ster is ρ vele malen groter dan in de interstellaire ruimte; voor een sterrewind met constante snelheid is $\rho \propto r^{-2}$, waarin r de afstand tot de ster. Samen met Eq.(1.68) zien we daaruit dat het lanceren van zo'n denkbeeldige raket vanuit een planetenstelsel in principe haalbaar is.

Ga nu zelf het volgende na.

Laat met behulp van Eq.(1.62-64) zien dat een raket van het beschreven type zijn eigen massa opveegt in precies 1 jaar, dus over een afstand van 1 lichtjaar.

De afstand tot het centrum van de Melkweg is 28000 jaar, dus om die reis te maken moet de raket evenzoveel maal zijn eigen massa opvegen. Ter vergelijking: een auto van 500 kg die 'een-op-tien' loopt, kan 5000 km afleggen bij het verstoken van zijn eigen massa aan brandstof. Rijdt zo'n auto 28000 maal zijn eigen massa op, dan is de afgelegde afstand 140 miljoen kilometer. Dat is bijna precies de afstand tussen de Aarde en de Zon. Met een snelheid van 200 km/h zou de auto hier 80 jaar over doen. De relativistische raket bereikt het centrum van de Melkweg in iets meer dan bijna 11 jaar (zie Eq.(1.50) voor $\tau = 28000$). Het is aardig dat autorijden binnen ons Zonnestelsel in deze opzichten vergelijkbaar is met relativistisch door de Melkweg rossen.

2. Algemene relativiteitstheorie

Omdat de lichtsnelheid eindig en maximaal is, kan een globale symmetrie niet bestaan. Elke symmetrie moet lokaal zijn. Eerst berekenen we het interval, een grootheid die onveranderd blijft bij een globale Lorentztransformatie. We gaan over naar lokale symmetrie door te werken met differenties, analoog aan de werkwijze bij de klassieke mechanica. Lokale Lorentz-symmetrie leidt tot een structuur van tijd-ruimte die wordt beschreven met een soort afstandsrecept. De numerieke factoren in dat recept zijn samengevat in de metrische tensor.

In het vorige hoofdstuk zagen wij, dat de ruimte-tijd (x, t) in een coördinatenstelsel $\mathcal{K}$ wordt omgevormd in de (x', t') in een coördinatenstelsel $\mathcal{K}'$ dat met snelheid v ten opzichte van $\mathcal{K}$ beweegt, volgens de Lorentztransformatie. Deze wordt beschreven door de matrix

$$L = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$ ♠

Er is echter een beperking die de toepassing van L wat kunstmatig maakt: de transformatie $\mathcal{K} \to (L) \to \mathcal{K}'$ geldt alleen voor *constante* snelheid $v = \beta c$.

Hoe moeten we nu te werk gaan als v verandert in plaats en in tijd? Op soortgelijke manier als hierboven: wij stellen eerst vast dat L zo gek nog niet is. Wij veronderstellen dat de natuur weliswaar *globaal* niet Lorentz-invariant is, maar dat *locaal* wel de vorm L mag worden gebruikt, zij het dan dat β van plaats tot plaats en van tijd tot tijd verschilt. We kunnen dat in ons formalisme inbouwen door vast te stellen dat een baan $\vec{x}$ die in ruimte-tijd gekromd is, kan worden opgebouwd uit infinitesimale stukjes die elk voor zich een rechte lijn willekeurig dicht benaderen. Door niet globaal te kijken maar locaal, beschouwen wij niet (x, t) maar de differenties (dx, dt). Dus inplaats van

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \tag{2.2}$$
$$ct' = \gamma(\beta x + ct) \tag{2.3}$$

krijgen we

$$dx' = \gamma(dx + \beta c\, dt) \tag{2.4}$$
$$c\, dt' = \gamma(\beta dx + c\, dt) \tag{2.5}$$

Om te zien welke, gebruiken wij de fundamentele symmetrie-eigenschap van L. Overal zagen we, dat een symmetrie leidt tot een invariantie, een behouden grootheid. In het geval van de speciale relativiteitstheorie zien we uit Eq.(2.2,3) dat

$$\begin{aligned} x'^2 - c^2t'^2 &= \gamma^2(x^2 + 2\beta xct + \beta^2c^2t^2 - \beta^2x^2 - 2\beta xct - c^2t^2) \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(x^2 - c^2t^2) \\ &= x^2 - c^2t^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dus de uitdrukking $x^2 - c^2t^2$ heeft een zeer bijzondere eigenschap: onder Lorentztransformaties is

$$x^2 - c^2t^2 = \text{invariant} \tag{2.7}$$

Dit is de grootheid die behouden is dankzij de Lorentz-symmetrie. Uiteraard verdient deze een eigen naam; we noemen s het `interval`, gedefinieerd door

$$x^2 - c^2t^2 \equiv -c^2s^2 \tag{2.8}$$

De invariantie van het interval onder Lorentztransformaties doet zeer sterk denken aan invariantie onder draaiingen. Een draaiing over een hoek ϕ in een (x, y)-vlak wordt beschreven door de rotatiematrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

zodat de coördinaten transformeren volgens

$$x' = x\cos\phi - y\sin\phi \tag{2.10}$$

$$y' = x\sin\phi + y\cos\phi \tag{2.11}$$

Hieruit zien we meteen dat

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \equiv r^2 \tag{2.12}$$

Zoals de voerstraal r invariant is onder draaiingen, zo is het interval s invariant onder Lorentztransformaties. Vergelijken we Eq.(2.8) en Eq.(2.12) , dan zien we deze gelijkenis direct. Alleen dat minteken in Eq.(2.8) is vreemd! Bij verder onderzoek blijkt dat deze malle '$-$' verantwoordelijk is voor bijna alle tegen-intuïtieve eigenschappen van de relativiteit. Merk nog op dat *een lichtstraal heeft interval nul:* voor het licht geldt $s = 0$. Volgens de meetkunde van ruimte en tijd is de 'afstand' tussen het punt waarop het licht wordt uitgezonden en het punt waarop het aankomt, nul. Kijken we naar Eq.(2.3) dan zien wij dat langs een lichtstraal ook geldt $t' = 0$. Ruwweg kunnen wij dus zeggen: *voor een lichtstraal vallen het moment van uitzending en absorptie samen.*

Wij kunnen de invariantie van s gebruiken door te stellen: waar bij constante v een globale Lorentz-symmetrie geldt, daar geldt een *locale* Lorentz-symmetrie in het algemene geval. Dus schrijven we Eq.(2.8) , in navolging van Eq.(2.4,5) , als

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 \tag{2.13}$$

Dit wordt meestal geschreven in de vorm

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 \tag{2.14}$$

Merk op dat dit een wat onzuivere notatie is, want met ds^2 bedoelen we $(ds)^2$ en *niet* $d(s^2)$. Het probleem van een locale Lorentz-symmetrie is nu, dat hierdoor L een functie van de ruimte-tijdcoördinaten is geworden:

$$L = L(x,t) \tag{2.15}$$

Zodoende kan Eq.(2.14) in die vorm maar op één plaats en tijd in het Heelal worden gebruikt, en dat is een beetje weinig. Wij moeten dus een algemenere versie van deze vergelijking vinden. Net als bij de afleiding van de Lorentztransformatie doen we dat, door een algemene bilineaire vorm te proberen:

$$ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{tx}\, dt\, dx + g_{xt}\, dx\, dt + g_{xx}\, dx^2 \tag{2.16}$$

Als (x,t) gewone reële getallen zijn, is $dx\, dt = dt\, dx$. Dus moet ook gelden

$$g_{tx} = g_{xt} \tag{2.17}$$

De matrix g is symmetrisch.

Hoe moeten wij nu Eq.(2.16) interpreteren? We kunnen een analogie maken met de vergelijkingen voor krommen in Eq.(2.12,14) : evenals (x,y) de coördinaten zijn van een cirkel met straal r, en evenals

(x, ct) de coördinaten zijn van een hyperbool met pericentrum s, zo zijn (dx, dt) *de infinitesimale lijnstukjes die gezamenlijk een kromme bepalen die wordt beschreven door de matrix* g. Dat is nogal dramatisch: blijkbaar is het zo, dat het toepassen van een *locale* Lorentz-transformatie leidt tot een tijd-ruimtestructuur die wordt beschreven met g. De meetkundige eigenschappen van die algemene (dx, dt)-ruimte worden bepaald door g. Deze grootheid heeft men dan ook de `metrische tensor` genoemd. De uitdrukking Eq.(2.16) is een *afstandsrecept*, dat aangeeft hoever het is 'van A naar B' in een ruimte met een algemene structuur. De afstand wordt gemeten met behulp van het interval s.

De theorie welke g en zijn dynamica beschrijft heet de `algemene relativiteitstheorie`. In werkelijkheid bestaat g uit 16 getallen, in een blok van 4×4, maar omdat g symmetrisch is zijn er slechts 10 onafhankelijke componenten.

De structuur van tijd-ruimte die door g wordt beschreven, kunnen we samenvatten door een *kromming*, evenals Eq.(2.12) de kromming van een cirkelboog beschrijft en Eq.(2.14) de kromming van een hyperbooltak. Enigszins kort door de bocht kunnen we stellen: *een gekromde ruimte geeft gekromde banen.* Op deze manier is de theorie van g bruikbaar voor de beschrijving van de zwaartekracht, waarbij de kromming van banen niet wordt toegeschreven aan de werking van een 'kracht-op-afstand', maar aan de locale structuur van tijd en ruimte. Daarvoor is nog wel nodig dat we de rol van de materie erin betrekken, maar voor dit college gaat dat veel te ver. We moeten ons beperken tot de opmerking dat er talloze `metrieken` zijn van het type Eq.(2.16) , waaronder zeer belangrijke en interessante, zoals de `Friedmann-Robertson-Walker metriek` die het Heelal beschrijft, en de `Schwarzschild metriek` van zwarte gaten.